ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU
HỘI ĐỒNG TUYỂN SINH LỚP 10
NĂM HỌC 2024-2025

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
Năm học 2024 – 2025
Môn thi: Toán chuyên
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Bài 1. (2 điểm)

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + z^3 = y \\ y^3 + x^3 = z \\ z^3 + y^3 = x \end{cases}$.
2) Cho hai số nguyên dương a, b phân biệt. Chứng minh phương trình sau có đúng ba nghiệm
$$\left(\sqrt{x} - 1\right)\left[x^2 - 2(a+b)x + ab + 2\right] = 0.$$

Bài 2. (1.5 điểm) Cho ba số thực a, b, c không âm thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 + 3 = 2(ab + bc + ca)$. Chứng minh
$$3 \le a + b + c \le \frac{2(ab + bc + ca) + 3}{3}.$$

Bài 3. (2 điểm) Với mỗi số tự nhiên n, đặt $a_n = \left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \left(2 - \sqrt{3}\right)^n$.

a) Chứng minh $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$ với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$.
b) Tìm n để a_n chia hết cho 4.
c) Tìm n để a_n chia hết cho 14.

Bài 4. (3 điểm) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có tam giác ABD là tam giác nhọn và đường chéo AC đi qua tâm O của đường tròn (O). Gọi I là trung điểm BD, H là trực tâm của tam giác ABD, E là giao điểm khác A của AI với (O) và K là hình chiếu vuông góc của H lên AI.

a) Chứng minh $CEHK$ là hình bình hành và $IB^2 = ID^2 = IA.IK$.
b) Lấy điểm F trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BD}$ của đường tròn (O) sao cho $\widehat{BAF} = \widehat{DAI}$. Chứng minh các điểm K và F đối xứng nhau qua đường thẳng BD.
c) Chứng minh các đường phân giác trong các góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BKD}$ cắt nhau trên BD.
d) Trên đường thẳng qua H và song song AC lấy điểm T sao cho $TH = TK$. Chứng minh các điểm O, K, F, T cùng thuộc một đường tròn.

Bài 5. (1.5 điểm) Cho các số nguyên dương $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{30} < a_{31}$. Người ta ghi tất cả các số này lên 31 chiếc thẻ, mỗi thẻ ghi một số.

a) Biết rằng tổng các số được ghi trên 16 thẻ bất kỳ trong số 31 thẻ trên luôn lớn hơn tổng các số được ghi trên 15 thẻ còn lại. Chứng minh $a_1 \ge 226$.
b) Lấy $a_1, a_2, \ldots, a_{31}$ là 31 số nguyên dương đầu tiên: $1, 2, \ldots, 31$. Người ta bỏ 31 thẻ được ghi các số này vào hai chiếc hộp một cách ngẫu nhiên. Khi kiểm tra một hộp thì thấy rằng trong hộp đó không có hai thẻ nào có tổng hai số được ghi là số chính phương. Chứng minh trong hộp còn lại ta có thể chọn ra được bốn thẻ và chia chúng thành hai cặp sao cho tổng hai số được ghi trên mỗi cặp là số chính phương.

-----------HẾT---------

ĐÁP ÁN

Bài 1.

1) **(1 đ)**Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+z^3=y & (1) \\ y^3+x^3=z & (2) \\ z^3+y^3=x & (3) \end{cases}$.

Lấy hiệu phương trình (1) và (2) vế theo vế ta được: $(y-z)(y^2+yz+z^2+1)=0$. **(0.25đ)**

Do $y^2+yz+z^2=\left(y+\frac{z}{2}\right)^2+\frac{3z^2}{4}\geq 0$ nên $y=z$. **(0.25đ)**

Tương tự, lấy hiệu phương trình (2) và (3) ta được $x=z$. **(0.25đ)**

Thế lại (1): $2x^3=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0=y=z \\ x=\frac{1}{\sqrt{2}}=y=z \\ x=-\frac{1}{\sqrt{2}}=y=z \end{array}\right.$. **(0.25đ)**

2) **(1đ)**Điều kiện: $x\geq 0$.

Phương trình trở thành: $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2(a+b)x+ab+2=0 \quad (*) \end{array}\right.$. **(0.25đ)**

Xét pt (*): $\Delta'=(a+b)^2-ab-2=a^2+b^2+ab-2\geq 0$ (do a, b nguyên dương);

$S=a+b>0;\ P=ab+2>0$.

Suy ra pt (*) có hai nghiệm phân biệt dương. **(0.5đ)**

Ta nhận xét tiếp pt (*) không nhận $x=1$ là nghiệm. Giả sử ngược lại, thế vào pt ta có:

$1^2-2(a+b)1+ab+2=0 \Leftrightarrow (a-2)(b-2)=1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=1 \\ a=b=3 \end{array}\right.$ (trái giả thuyết a, b phân biệt). **(0.25đ)**

Vậy phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Bài 2. (1.5đ) Do $ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2$. **(0.25đ)**

Thế vào giả thuyết $ab+bc+ca\leq 2(ab+bc+ca)-3 \Rightarrow ab+bc+ca\geq 3$. **(0.25đ)**

Mà $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$, suy ra $a+b+c\geq 3$. **(0.25đ)**

Từ giả thuyết: $(a+b+c)^2+3=4(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca=\frac{(a+b+c)^2+3}{4}$. **(0.25đ)**

Ta chứng minh:

$$a+b+c\leq \frac{2(ab+bc+ca)+3}{3} \Leftrightarrow 3(a+b+c)\leq \frac{(a+b+c)^2+3}{2}+3$$

$\Leftrightarrow (a+b+c-3)^2\geq 0$ (đúng) **(0.5đ)**

Bài 3.

a) Ta có: $a_{n+1}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n+1}$; $a_{n+2}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+2}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n+2}$ **(0.25đ)**

Suy ra :

$a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n$

$$=\left(2+\sqrt{3}\right)^n\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^2-4\left(2+\sqrt{3}\right)+1\right]+\left(2-\sqrt{3}\right)^n\left[\left(2-\sqrt{3}\right)^2-4\left(2-\sqrt{3}\right)+1\right] \quad \textbf{(0.25đ)}$$

$=0$

Vậy $a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$ **(0.25đ)**

b) Từ câu a): $a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$ suy ra $a_{n+2}\equiv -a_n \pmod 4$ **(0.25đ)**

Bằng quy nạp, ta suy ra:

$a_n \equiv (-1)^{n/2}a_0 \pmod 4$ nếu n chẵn; $a_n \equiv (-1)^{(n-1)/2}a_1 \pmod 4$ nếu n chẵn **(0.25đ)**

Mà $a_0=2,\ a_1=4$ nên a_n chia hết cho 4 khi n là số lẻ. **(0.25đ)**

c) Từ câu b) ta suy ra a_n luôn là số chẵn, do đó ta chỉ cần xét a_n chia hết cho 7.

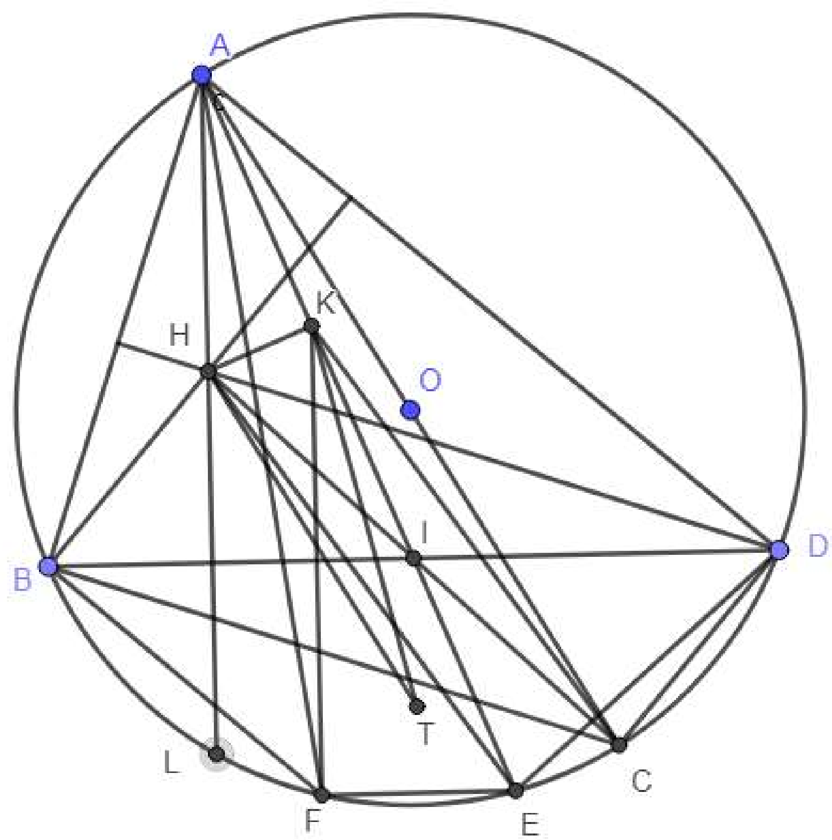
Xét các giá trị cụ thể như sau:

$a_0=2;\ a_1=4;\ a_2=0;\ a_3=3;\ a_4=5;\ a_5=3;\ a_6=0;\ a_7=4;\ a_8=2;\ a_9=4;\ a_{10}=0$

Bằng chứng minh quy nạp, ta suy ra $a_{n+8}\equiv a_n \pmod 7$ với mọi n. **(0.25đ)**

Vậy a_n chia hết cho 14 khi $n=8k+2$ hoặc $n=8k+6$, với k là số tự nhiên.**(0.25đ)**

Bài 4.



a) Ta có: BHDC là hình bình hành nên I là trung điểm HC. **(0.25đ)**

Suy ra $\Delta IKH=\Delta IEC(g-c-g)$ nên $CE=HK$

Do đó $CEHK$ là hình bình hành. **(0.25đ)**

Ta có: $IB.IC=IA.IE$. **(0.25đ)**

Mà $IB=IC;\ IK=IE$ nên $IB^2=IA.IK$. **(0.25đ)**

b) Từ giả thuyết, suy ra $EF//BD$. **(0.25đ)**

Nên $OI\perp EF$, do đo $IF=IE=IK$. **(0.25đ)**

Suy ra, ΔKFE vuông tại F nên BD là trung trực KF. **(0.25đ)**

c) Từ $IB^2 = IA.IK$ suy ra ΔIBK và ΔIAB đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{KB}{AB} = \dfrac{IB}{IA}$. **(0.25đ)**

Tương tự $ID^2 = IA.IK$ suy ra ΔIDK và ΔIAD đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{KD}{AD} = \dfrac{ID}{IA}$.

Do đó: $\dfrac{KB}{AB} = \dfrac{KD}{AD}$. **(0.25đ)**

Gọi J là chân đường phân giác trong AJ của tam giác ABC.

Ta có $\dfrac{JB}{JD} = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow \dfrac{KB}{KD} = \dfrac{JB}{JD}$. Suy ra KJ là phân giác góc $\widehat{BKD}$ (đpcm). **(0.25đ)**

d) Gọi L là giao điểm của AH và (O).
Suy ra, L đối xứng với H qua BD, mà K và F cũng đối xứng qua BD.
Nên (BHKD) và (O) đối xứng qua BD.
Goi T' là tâm của đường tròn (BHKD), suy ra O và T' đối xứng qua BD. **(0.25đ)**
Mà $OI \perp BD$, nên I là trung điểm OT'.
Do đó, OHT'C là hình bình hành, suy ra HT' // OC.
Mà $T'H = T'K$ nên T' thuộc trung trực HK. Suy ra $T \equiv T'$.
Do tính đối xứng qua BD nên OKFT là hình thang cân nên cũng là tứ giác nội tiếp. **(0.25đ)**

Bài 5.

a) Từ giả thuyết

$$a_1 + a_2 + ... + a_{16} > a_{17} + ... + a_{31}$$
$$\Rightarrow a_1 > (a_{17} - a_2) + (a_{18} - a_3) + ... + (a_{31} - a_{16}).$$ **(0.25đ)**

Do $a_{17} \geq a_{16} + 1 \geq ... \geq a_2 + 15 \Rightarrow a_{17} - a_2 \geq 15$ **(0.25đ)**

Tương tự $a_{18} - a_3 \geq 15, ..., a_{31} - a_{16} \geq 15$ **(0.25đ)**

Suy ra : $a_1 > 15.15 = 225 \Rightarrow a_1 \geq 226$. **(0.25đ)**

b) Xét ba thẻ ghi các số lần lượt là 6, 19 và 30. Ta thấy rằng tổng 2 thẻ bất kỳ trong chúng hoặc là 25, 36 hoặc 40, nên đều là các số chính phương.
Do chia các thẻ vào 2 hộp nên theo nguyên lý Dirichlet sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất 2 thẻ trong 3 thẻ trên nên tổng 2 thẻ đó là số chính phương. **(0.25đ)**
Loại 3 thẻ này, giả sử không còn hộp nào chứa hai thẻ mà tổng lại lá số chính phương.
Ta xét cụ thể, giả sử thẻ số 1 thuộc hộp thứ nhất, khi đó các thẻ 3, 8, 15, 24 sẽ thuộc hộp thứ hai.
Do thẻ ghi số 3 thuộc hộp thứ hai nên thẻ 13 sẽ thuộc hộp thứ nhất. Nên thẻ 12 sẽ thuộc hộp thứ hai.
Khi đó, trong hộp thứ hai này ta chọn thẻ 12 và 24, tổng của chúng sẽ là số chính phuong (mâu thuẫn).
Vậy trong hộp còn lại này ta sẽ chọn được 4 thẻ thỏa mãn ycđb. **(0.25đ)**